

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑ.Λ.

(Ενδεικτικές απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σελίδα 30 Σχολικό Βιβλίο

A2. Ορισμός Σελίδα 22 Σχολικό Βιβλίο

A3. α. Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + \alpha \cdot 2x - 12 \cdot 1 + 0 = 6x^2 + 2\alpha x - 12$$

B2.

Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της f στο $x_0 = 1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{\varepsilon\phi} = f'(1) .$$

Ισχύει ότι

$$\varepsilon\phi \parallel x'x \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon\phi} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 - 12 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

B3.

$$\text{Για } \alpha = 3, f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$\text{Έχουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -2$$

Έτσι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[1, +\infty)$

και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1)$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 1]$

Επίσης για $x = -2$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 10 = 30 \text{ και}$$

Για $x = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 10 = 3$$

B4.

Για $\alpha = 3$,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 6x - 12}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} [6(x+2)] = 6(1+2) = 18$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 10 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 18 \cdot v_3 + 22 \cdot 5 = 200 + 210 + 18 \cdot v_3 + 110 = 520 + 18 \cdot v_3$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} \Leftrightarrow 14 = \frac{520 + 18v_3}{v} \Leftrightarrow 520 + 18v_3 = 14v \quad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v \Leftrightarrow 20 + 15 + v_3 + 5 = v \Leftrightarrow v = 40 + v_3 \quad (2)$$

Η (1) λόγω της (2) γίνεται

$$520 + 18 \cdot v_3 = 14(40 + v_3) \Leftrightarrow 520 + 18 \cdot v_3 = 560 + 14 \cdot v_3 \Leftrightarrow 4v_3 = 40 \Leftrightarrow v_3 = 10$$

$$\text{Τότε (2)} \Leftrightarrow v = 40 + 10 = 50$$

Γ2.

κλάσεις	x_i	v_i	$x_i v_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)	18	10	180
[20,24)	22	5	110
	Σύνολο	50	700

Γ3.

$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v$
-4	16	320
0	0	0
4	16	160
8	64	320
Σύνολο		800

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{800}{50} = 16 \text{ η διακύμανση}$$

Γ4.

Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$

$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{7} \approx 0,3 = 30\% > 10\%$ επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{(1)'x^2 - 1(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ άρα η $f \searrow (-\infty, 0)$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ άρα η $f \nearrow (0, +\infty)$

Δ2.

$$-4 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow f(-4) \geq f(x) \geq f(-1) \Leftrightarrow -\frac{1}{16} \geq f(x) \geq -1 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$

αφού

$$f \searrow (-\infty, 0) \text{ και } x \in [-4, -1] \text{ και } f(-4) = -\frac{1}{(-4)^2} = -\frac{1}{16},$$

$$f(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} = -1$$

Δ3.

Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$M(1, f(1))$

$$\varepsilon: y = \alpha x + \beta \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\alpha = f'(1) = \frac{2}{1^3} = 2 \text{ και } f(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

Το σημείο επαφής $M(1, -1)$ ανήκει στην εφαπτομένη, άρα

$$-1 = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$$

Επομένως $\varepsilon: y = 2x - 3$

Δ4.

Ισχύει $y_i = 2x_i - 3$ με $i = 1, 2, 3$

$$\bar{y} = 2\bar{x} - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5 \text{ και } s_y = 2 \cdot s_x = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{Επομένως } CV = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4}{5}$$