Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Θετικών & Οικονομικών Σπουδών

Ημερομηνία: 6 Ιουνίου 2023

Μαθηματικά Προσανατολισμού

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

Θέμα Α

Α1. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 111*
Α2. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 104*
Α3. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 128*
Α4.

- **α.** Λάθος
- **β.** Λάθος
- **γ.** Λάθος
- **δ.** Σωστό
- **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για το πεδίο ορισμού της σύνθεσης έχουμε:

$$A_{g\circ h} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_h \ \text{ και } \ h(x) \in A_g\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \ \text{ και } \ \ln x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

Ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$(g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big) = \frac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}, \qquad x > 0$$

Β2.

i. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{-2x \cdot x - (4 - x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} < 0, \text{για κάθε } x > 0$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e} \overset{4-e^2<0}{\Longleftrightarrow} \frac{4 - \pi^2}{\pi} < \frac{4 - e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e)$$

Ισχύει ότι $\pi > e$ και η f γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ συνεπώς $f(\pi) < f(e)$.

Β3.

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $(0, +\infty)$.

- Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x = 0$:

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4 - x^2}{x} = +\infty$$

Άρα, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

- Αναζητούμε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της μορφής $y = \lambda x + \beta$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda$$

Επίσης:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim_{x\to+\infty}[f(x)+x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4-x^2}{x}+x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4-x^2+x^2}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0$$

Άρα, η ευθεία $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β' Τρόπος: Παρατηρούμε ότι: $f(x) = \frac{4}{x} - x \Leftrightarrow f(x) + x = \frac{4}{x}$

Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0$ οπότε η ευθεία $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)}\sigma\upsilon\nu(1+x^2)$ για x κοντά στο $+\infty$ για την οποία ισχύει:

$$|\varphi(x)| = \left|\frac{1}{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right| = \left|\frac{1}{f(x)}\right|\cdot|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)| \le \left|\frac{1}{f(x)}\right|\cdot 1$$

$$\Leftrightarrow -\left|\frac{1}{f(x)}\right| \le \varphi(x) \le \left|\frac{1}{f(x)}\right|, \qquad (1)$$

Όμως:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-x} = 0$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{f(x)}\right| = 0$.

Άρα, με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής: $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ αφού $f(x) = \frac{1}{x} + a$ για κάθε $x \in [2,3]$ και είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Ακόμα:

$$\int_2^3 xf(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+ax)\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[x + \frac{ax^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3 + \frac{9a}{2} - 2 - 2a = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{5a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = 0$$

Γ2. i) Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to1^+} -\frac{1}{x} = -1$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to1^-}(x-2) = -1$$

Οπότε ορίζεται η $f'(1)$ και είναι $f'(1) = -1$.

ii) Επειδή $f(1)=\frac{1}{1}+a=1$, αφού $a=0$, η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $(1,1)$ είναι:

$y-1=-1(x-1)\Leftrightarrow y=-x+2$

Και η γωνία που σχηματίζεται με τον $x'x$ είναι $\frac{3\pi}{4}$ rad αφού $f'(1)=-1$

$\Leftrightarrow εφω=-1, ω\in[0,\pi)$, όπου $ω$ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον $x'x$.

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, άρα και συνεχής εκεί.

Είναι:

- για κάθε $x<1$: $f'(x)=2x-3$ και $x<1\Leftrightarrow 2x<2\Leftrightarrow 2x-3<-1<0$
- για κάθε $x>1$: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$

Συνεπώς, $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ κι επειδή η f είναι συνεχής στο $x=1$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1»

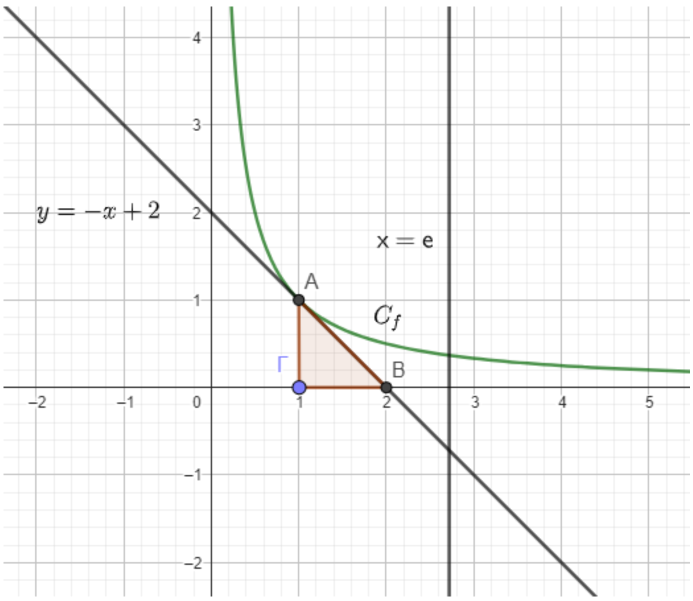
Για το σύνολο τιμών της f είναι: $f\big((-\infty,+\infty)\big)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$

αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-3x+3)=+\infty$$

Γ4.



Το χωρίο μεταξύ της C_f, της εφαπτομένης στο σημείο $\big(1,f(1)\big)$ και του άξονα $x'x$ φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Αρκεί να υπολογίσουμε το:

$\int_1^e f(x)\,dx-(ΑΒΓ)$, αφού για κάθε $x\geq 1$ είναι $f(x)=\frac{1}{x}>0$ και όπως φαίνεται κι απ' το σχήμα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο A, οπότε:

$$E(\Omega)=\int_1^e f(x)\,dx-(ΑΒΓ)$$

$$=\int_1^e\frac{1}{x}\,dx-\frac{(ΑΓ)(ΒΓ)}{2}=[\ln|x|]_1^e-\frac{1\cdot 1}{2}$$

$$= \ln e - \ln 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

$$E = \int_1^e (f(x) + x - 2)\, dx - \frac{(\Gamma\Delta)\cdot(B\Delta)}{2} = \left[\ln|x| + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^e - \frac{(e-2)\cdot(e-2)}{2}$$

$$= 1 + \frac{e^2}{2} - 2e - \frac{1}{2} + 2 - \frac{(e-2)^2}{2} = \frac{e^2 - 4e + 5}{2} - \frac{e^2 - 4e + 4}{2} = \frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

με B να είναι το σημείο τομής της $y = -x + 2$ και της $x = e$, οπότε το $B(e, 2 - e)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f(1) = k - 1$ και η f συνεχής στο $x = 1$ άρα $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x - 1}, x \in (0,1) \cup (1,2)$ με $\lim_{x\to 1} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Τότε $f(x) = g(x)(x-1) + 2x \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(g(x)(x-1) + 2x) = \ell \cdot 0 + 2 = 2$

Τελικά $f(1) = k - 1 = 2 \Leftrightarrow k = 3$.

Δ2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2(x-2)}$$

Είναι $x \in (0,2)$ επομένως $x - 2 < 0, x + 2 > 0, x^2 > 0$.

Έτσι έχουμε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Για το σύνολο τιμών έχουμε:

$f\big((0,1]\big) = (\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)] = (-\infty, 2]$

αφού $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$. Επίσης

$f\big((1,+\infty)\big) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right) = (-\infty, 2)$

αφού $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$.

Είναι $0 \in f\big((0,1]\big)$ και f γνησίως μονότονη στο $(0,1]$ επομένως υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1]$ με $x_1 \neq 1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Επίσης είναι $0 \in f((1,+\infty))$ και f γνησίως μονότονη στο $(1,+\infty)$ επομένως υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ και $x_1, \frac{1}{3} \in (0,1)$ επομένως αφού $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) > 0$ θα έχουμε:

$f\left(\frac{1}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) > f(x_1) \Leftrightarrow \frac{1}{3} > x_1$

Δ3. *Α' τρόπος:*

- f συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων
- f παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ με $f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ επομένως η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$. Επομένως, υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$ δηλαδή η κλίση της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ ισούται με $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

Β' τρόπος: Έχουμε την εξίσωση $f'(x) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$. Είναι $f\left(\frac{1}{3}\right) > 0 \Rightarrow 3f\left(\frac{1}{3}\right) > 0$ και $\frac{1}{3} > x_1$

$\Rightarrow 1 - 3x_1 > 0$ οπότε $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1} > 0$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ επομένως η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$.

Έτσι: $f'\big((0,1)\big) = \left(\lim_{x\to 1^-} f'(x), \lim_{x\to 0^+} f'(x)\right) = (0, +\infty)$

αφού $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ και $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$.

Είναι: $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1} \in f'\big((0,1)\big)$ και f' γνησίως μονότονη, επομένως υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$ δηλαδή η κλίση της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ ισούται με $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

Δ4. i) Οι F, G είναι αρχικές της f στο $(0,2)$ επομένως ισχύει $F'(x) = G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (0,2)$ και υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(x) = G(x) + c, \quad x \in (0,2)$.

Για $x = x_1$ έχουμε $F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow c = -G(x_1)$

Για $x = x_2$ έχουμε $F(x_2) = G(x_2) - G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) = -G(x_1) \Leftrightarrow G(x_1) + F(x_2) = 0$ που είναι ζητούμενο.

ii) Έχουμε την εξίσωση : $x_1F(x) + x_2G(x) + 2x - x_1 - x_2 = 0$

Έστω $h(x) = x_1F(x) + x_2G(x) + 2x - x_1 - x_2 = 0, x \in (0,2)$.

Αν $x \in (x_1, x_2)$ τότε $f(x) > 0$ επομένως $F'(x) = G'(x) > 0$ στο (x_1, x_2). Άρα F, G είναι γνησίως αύξουσες στο $[x_1, x_2]$. Έτσι: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow 0 < F(x_2)$

και $x_1 < x_2 \Rightarrow G(x_1) < G(x_2) \Rightarrow G(x_1) < 0$

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- $h(x_1) = x_1F(x_1) + x_2G(x_1) + x_1 - x_2 = x_2G(x_1) + x_1 - x_2 < 0$
  αφού $x_2 > 0$, $G(x_1) < 0$ και $x_1 - x_2 < 0$
- $h(x_2) = x_1F(x_2) + x_2G(x_2) + x_2 - x_1 = x_1F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$
  αφού $F(x_2) > 0, x_1 > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$.

Επομένως, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (x_1, x_2)$ με $h(\rho) = 0$ δηλαδή το ρ είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (0,2) με $h'(x) = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 > 0$, για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ και $x_1, x_2 > 0$.

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο (x_1, x_2) και το ρ είναι μοναδική ρίζα της αρχικής εξίσωσης.